ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.17 1986

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ ИНВАРИАНТНОМ СЕЧЕНИИ РАССЛОЕНИЯ $P_{n,m}$ $(n\geqslant 2)$

Е.Т. Ивлев

В статье доказывается существование инвариантного сечения расслоения $P_{n,m}$ $(n \geqslant 2)$.

1.Рассматривается n-мерное гладкое многообразие M_n (класса C^∞ или C^ω) с базисными формами θ^i $(i,j,k,\ell=\overline{1,n})$, удовлетворяющими структурным уравнениям:

$$\mathcal{D}\theta^i=\theta^j\wedge\theta_j^i,\quad \mathcal{D}\theta_j^i=\theta_j^k\wedge\theta_k^i+\theta^\ell\wedge\theta^i_{\ell j}\quad (\theta^k_{[ij]}=0),\tag{1}$$
$$\mathcal{D}\theta^k_{ij}=\theta^\ell_i\wedge\theta^k_{\ell j}+\theta^\ell_j\wedge\theta^k_{\ell i}+\theta^\ell_{ij}\wedge\theta^k_\ell+\theta^\ell\wedge\theta^k_{\ell ij}\quad (\theta^k_{[ij\ell]}=0).$$

Как показано в [1](см.теорему (3.2.), с. 162), на гладком многообразии M_n возникает, в частности, главное расслоенное пространство $M_n^s=(M_n,\mathcal{D}^s_n)$ $(s=1,2)$, у которого базой является многообразие M_n, а структурной слоевой группой- дифференциальная группа $\mathcal{D}^s_n$ порядка s, являющаяся подгруппой центроаффинной группы. Обозначим L_n - n-мерное центроаффинное пространство с центром в точке A, соответствующее каждой фиксированной точке $(u)\in M_n$ и являющееся представлением группы $\mathcal{D}^s_n$. Это пространство изоморфно векторному пространству $T_n(u)$, касательному к M_n в точке (u). Будем считать, что пространство L_n отнесено к подвижному аффинному реперу $E=\{\bar A,\bar e_i\}$ с деривационными формулами: $d\bar e_i=\bar\theta^j_i\bar e_j$, $\bar\theta^j_i=\theta^j_i|_{\theta^\ell=0}$, вполне интегрируемыми в силу (1) при $\theta^i=0$. Обозначим $L^1_n=(M_n,L_n)$- присоединенное расслоение с базой M_n и центроаффинными слоями $L_n(u)$.

2.Рассмотрим расслоенное пространство $P_{n,m}=(M_n,P_m)$ $(n\geqslant 2)$, базой которого служит гладкое многообразие M_n, а слоем, соответствующим каждой точке $(u)\in M_n$, является m-мерное проективное пространство $P_m(u)$, отнесенное к

проективному реперу $T=\{A_J\}$ $(I,J,K,L=\overline{0,m})$, причем в этом пространстве задано гладкое сечение: каждой точке $(u)\in M_n$ с главными параметрами u^i, соответствующими первым интегралам вполне интегрируемой системы форм θ^i, в слое $P_m(u)$ отвечает точка $A_0(u)$. Предполагается, что в $P_{n,m}$ задана проективная связность C, которая отображает соседний слой $P_m(u+du)$ точки $(u+du)\in M_n$ на исходный $P_m(u)$ точки $(u)\in M_n$ при помощи следующего отображения проективных реперов:

$$A_K(u+du)\to A_K(u,du)\doteq A_K(u)+\omega^J_K A_J(u).\tag{2}$$

Здесь формы ω^J_K удовлетворяют структурным уравнениям:

$$\mathcal{D}\omega^K_J=\omega^L_J\wedge\omega^K_L+R^K_{Jij}\theta^i\wedge\theta^j,\quad R^K_{J(ij)}=0,\quad \omega^J_J=0,\tag{3}$$

причем компоненты R^K_{Jij} тензора кручения - кривизны связности C удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\nabla R^K_{Jij}\equiv dR^K_{Jij}+R^L_{Jij}\omega^K_L-R^K_{Lij}\omega^L_J-R^K_{J\ell j}\theta^\ell_i-R^K_{Ji\ell}\theta^\ell_j=R^K_{Jij\ell}\theta^\ell.\tag{4}$$

3.Дифференциальные уравнения сечения в силу (3) и (1) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}&\omega^\alpha_0=A^\alpha_{0i}\theta^i\quad (\alpha,\beta,\gamma,\sigma,\mu,\tau,\lambda=\overline{1,m}),\\ &\nabla A^\alpha_{0i}-A^\alpha_{0i}\omega^0_0=A^\alpha_{0ij}\theta^j,\end{aligned}\tag{5}$$

$$\nabla A^\alpha_{0ij}-A^\alpha_{0ij}\omega^0_0-A^\alpha_{0\ell}\theta^\ell_{ji}-(A^\alpha_{0i}\delta^\beta_j+A^\beta_{0i}\delta^\alpha_j)\omega^0_\beta=A^\alpha_{0ijk}\theta^k,\tag{6}$$

$$A^\alpha_{0ij}=\Lambda^\alpha_{0ij}-R^\alpha_{0ij},\quad A^\alpha_{0ijk}=\Lambda^\alpha_{0ijk}+A^\alpha_{0i}R^0_{0jk}-A^\beta_{0i}R^\alpha_{\beta jk},\quad \Lambda_{0[ij]}=\Lambda_{0[ijk]}=0,\tag{7}$$

откуда следует, что система величин

$$\Gamma=\{A^\alpha_{0i},A^\alpha_{0ij}\}\tag{8}$$

образует геометрический объект второго порядка в смысле Г.Ф.Лаптева [2], который называется внутренним фундаментальным геометрическим объектом гладкой секущей n-мерной поверхности M^0_n с текущим элементом A_0, соответствующим точке $(u)\in M_n$. Будем говорить, что секущая n-поверхность M^0_n внутренним образом определяется на базе M_n расслоения $P_{n,m}$ $(n\geqslant 2)$, если компоненты геометрического объекта (8) являются функциями компонент $R^{\varkappa}_{\jmath ij}$ тензора кручения-кривизны связности C.

4.Зададим на базе M_n два поля геометрических объектов:

$$B_1=\{B^{\hat a}_{a}\},\ B_2=\{B^{a}_{\hat a}\}\ (a,b,c,f,g,h,u=1,2;\ \hat a,\hat b,\hat c,\hat f,\hat g,\hat h,\hat u=\overline{3,n}),\quad (9)$$

компоненты которых удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} &dB^{\hat a}_{a}-B^{\hat a}_{b}\overset{*}{\theta}{}^{b}_{a}+B^{\hat b}_{a}\theta^{\hat a}_{\hat b}+\theta^{\hat a}_{a}=B^{\hat a}_{ai}\theta^{i},\quad \overset{*}{\theta}{}^{b}_{a}=\theta^{b}_{a}+B^{\hat b}_{a}\theta^{b}_{\hat b},\\ &dB^{a}_{\hat a}-B^{a}_{\hat b}\overset{*}{\theta}{}^{\hat b}_{\hat a}+B^{b}_{\hat a}\theta^{a}_{b}+\theta^{a}_{\hat a}=B^{a}_{\hat a i}\theta^{i},\quad \overset{*}{\theta}{}^{\hat b}_{\hat a}=\theta^{\hat b}_{\hat a}+B^{b}_{\hat a}\theta^{\hat b}_{b}. \end{aligned}\quad (10)$$

Геометрически объекты (9) каждой точке $(u)\in M_n$ ставят в соответствие в пространстве $L_n(u)$ линейные подпространства $L^1_2, L^2_{n-2}: L^1_2\cap L^2_{n-2}=A;\ L^1_2\cup L^2_{n-2}=L_n,\ \dim L^1_2=2,\ \dim L^2_{n-2}=n-2$, которые в аффинных координатах репера E пространства L_n определяются уравнениями:

$$L^1_2:\ V^{\hat a}=B^{\hat a}_{a}V^{a};\quad L^2_{n-2}:\ W^{a}=B^{a}_{\hat a}W^{\hat a}.\quad (11)$$

5.Каждой точке $(u)\in M_n$ в соответствующем центроаффинном пространстве $L_n(u)$ сопоставим с учетом (10) два направления:

$$V=(\bar A\bar e_i)V^i\in L^1_2\Leftrightarrow V^{\hat a}=B^{\hat a}_{a}V^{a};\ W=(\bar A\bar e_j)W^j\in L^2_{n-2}\Leftrightarrow W^{a}=B^{a}_{\hat a}W^{\hat a}.\quad (12)$$

Тогда каждой точке $(u)\in M_n$ расслоения $P_{n,m}$ отвечают следующие проективитеты слоя $P_m(u)$ в себя:

$$\overset{*}{R}=R(L^1_2)=\{\overset{*}{R}{}^{\varkappa}_{\jmath}\},\quad \widetilde R(V,W)=\{\widetilde R^{\varkappa}_{\jmath}\},\quad (13)$$

$$\overset{*}{R}{}^{\varkappa}_{\jmath}=R^{\varkappa}_{\jmath 12}+R^{\varkappa}_{\jmath 1\hat a}B^{\hat a}_{2}-R^{\varkappa}_{\jmath\hat a 2}B^{\hat a}_{1}+R^{\varkappa}_{\jmath\hat a\hat b}B^{\hat a}_{1}B^{\hat b}_{2},\quad (14)$$

$$\widetilde R^{\varkappa}_{\jmath}=(R^{\varkappa}_{\jmath ab}B^{a}_{\hat a}+R^{\varkappa}_{\jmath\hat a b}+R^{\varkappa}_{\jmath a\hat b}B^{a}_{\hat a}B^{\hat b}_{b}+R^{\varkappa}_{\jmath\hat a\hat b}B^{\hat b}_{b})V^{\hat a}W^{b}.\quad (15)$$

Геометрически эти проективитеты характеризуются так же, как и проективитет (8) в [3]. Из (13) - (15) следует, что каждой паре направлений (12), соответствующих точке $(u)\in M_n$, отвечают проективитеты слоя $P_m(u)$ в себя:

$$\begin{aligned} &P(V,W)=\overset{*}{R}\cdot\widetilde R(V,W)=\{P^{l}_{\jmath}\},\quad P^{l}_{\jmath}=\overset{*}{R}{}^{\varkappa}_{\jmath}\widetilde R^{l}_{\varkappa},\\ &Q(V,W)=\overset{*}{R}{}^{2}\cdot\widetilde R(V,W)=\{Q^{l}_{\jmath}\},\quad Q^{l}_{\jmath}=\overset{*}{R}{}^{M}_{\jmath}\overset{*}{R}{}^{\varkappa}_{M}\widetilde R^{l}_{\varkappa}. \end{aligned}\quad (16)$$

6. О п р е д е л е н и е 1. Линейные подпространства L^1_2 и L^2_{n-2} в слое L_n присоединенного расслоения $L^1_n=(M_n,L_n)$, отвечающие точке $(u)\in M_n$, называются главными, если проективитеты $P(V,W)$ и $Q(V,W)$ слоя $P_m(u)$ в себя являются проективитетами W в смысле [4] при $\forall V\in L^1_2$, $\forall W\in L^2_{n-2}$, т.е. если

$$P^{\jmath}_{\jmath}=0,\quad Q^{\jmath}_{\jmath}=0,\quad \forall V\in L^1_2,\ \forall W\in L^2_{n-2}.\quad (17)$$

Т е о р е м а 1. Каждой точке $(u)\in M_n$ расслоения $P_{n,m}$ ($n>2$) в слое $L_n(u)$ присоединенного расслоения L^1_n отвечает в общем случае конечное число главных линейных подпространств L^1_2 и L^2_{n-2}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (17) в силу (12)-(16) следует, что L^1_2 и L^2_{n-2} будут главными тогда и только тогда, когда величины $B^{\hat a}_{a}$ и $B^{a}_{\hat a}$ удовлетворяют следующей системе $N=4(n-2)$ алгебраических неоднородных уравнений:

$$\begin{aligned} &\varphi_{\hat a b}\equiv L_{\hat f\hat g a\hat b}B^{\hat f}_{1}B^{\hat g}_{2}B^{a}_{\hat a}B^{\hat b}_{b}+\ldots+L_{12ab}B^{a}_{\hat a}+L_{12\hat a\hat b}B^{\hat b}_{b}+\\ &\qquad+L_{1\hat c\hat a b}B^{\hat c}_{2}+L_{\hat c 2\hat a b}B^{\hat c}_{1}+L_{12\hat a b}=0; \end{aligned}\quad (18)$$

$$\begin{aligned} &\psi_{\hat b a}\equiv L_{\hat f\hat g\hat u\hat h b\hat a}B^{\hat f}_{1}B^{\hat g}_{2}B^{\hat u}_{1}B^{\hat h}_{2}B^{b}_{\hat b}B^{\hat a}_{a}+\ldots+L_{1212ba}B^{b}_{\hat b}+L_{1212\hat b\hat a}B^{\hat a}_{a}+\\ &+L_{\hat b a121\hat u}B^{\hat u}_{2}+L_{\hat b a12\hat u 2}B^{\hat u}_{1}+L_{\hat b a\hat c 12}B^{\hat c}_{2}+L_{\hat b a12\hat u 2}B^{\hat u}_{2}+L_{1212\hat b a}=0, \end{aligned}$$

где

$$L_{ijkl}=R^{\varkappa}_{\jmath ij}R^{\jmath}_{\varkappa kl},\quad L_{ijklpq}=R^{M}_{\jmath ij}R^{\varkappa}_{Mkl}R^{\jmath}_{\varkappa pq}.\quad (19)$$

Для доказательства настоящей теоремы надо показать, что ранг якобиевой матрицы системы (18)

$$I=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi_{\hat a b}}{\partial B^{\hat h}_{h}} & \dfrac{\partial\psi_{\hat b a}}{\partial B^{\hat h}_{h}}\\[2ex] \dfrac{\partial\varphi_{\hat a b}}{\partial B^{f}_{\hat f}} & \dfrac{\partial\psi_{\hat b a}}{\partial B^{f}_{\hat f}} \end{bmatrix}$$

равен $N=4(n-2)$. Подсчитывая этот ранг, например, при $B^{\hat{1}}_{h}=0$, $B^{\hat{\ell}}_{\hat{\ell}}=0$, получаем, что матрица I имеет минор порядка N:

$$B = \det\left[B_{a\hat{a}\hat{b}}^{\;\;c}\right], \tag{20}$$

где

$$B_{a\hat{a}\hat{b}}^{\;\;c} = L_{\hat{b}212a\hat{a}}\delta^c_1 + L_{1\hat{b}12a\hat{a}}\delta^c_2 + L_{12\hat{b}2a\hat{a}}\delta^c_1 + L_{121\hat{b}a\hat{a}}\delta^c_2 + \tag{21}$$
$$+ L_{1212\hat{b}\hat{a}}\delta^c_a + L_{1212ab}A^{bc}_{\hat{a}\hat{b}}, \quad A^{11}_{\hat{a}\hat{b}} = R^{-1}L_{\hat{b}22\hat{a}}, \quad A^{22}_{\hat{a}\hat{b}} = -R^{-1}L_{1\hat{b}1\hat{a}},$$
$$A^{12}_{\hat{a}\hat{b}} = R^{-1}(L_{1\hat{b}2\hat{a}} + L_{12\hat{b}\hat{a}}), \quad A^{21}_{\hat{a}\hat{b}} = -R^{-1}(L_{\hat{b}21\hat{a}} + L_{12\hat{b}\hat{a}}), \quad R = L_{1212} \neq 0,$$

причем в (20) значения пар чисел $(a\hat{a})$ указывают на номера столбцов, а пар чисел $\binom{c}{\hat{b}}$ – на номера строк. Заметим, с учетом (21) и (19), что величины $B_{a\hat{a}\hat{b}}^{\;\;c}$ зависят от $S = (m+1)\frac{n(n-1)}{2}$ независимых величин R^{x}_{Jij}. Поскольку всего независимых величин $B_{a\hat{a}\hat{b}}^{\;\;c}$ равно $4(n-2)^2$ и не превосходит S, то можно положить

$$B_{a\hat{a}\hat{b}}^{\;\;c} = \begin{cases} 1, & a=c,\ \hat{a}=\hat{b}; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда из (20) получаем $B = 1 \neq 0$. Поэтому $\operatorname{Rang} I = 4(n-2)$, и система (18) состоит в общем случае из алгебраически независимых уравнений, а поэтому имеет конечное число решений относительно $B^{\hat{a}}_{a}$ и $B^{\ell}_{\hat{\ell}}$. Теорема доказана.

7. Проведем в слое $L_n(u)$ присоединенного расслоения L^1_n такую фиксацию репера E, при которой

$$L^1_2 = (\bar{A}\bar{e}_1, \bar{e}_2) \Leftrightarrow V^{\hat{a}} = 0; \quad L^2_{n-2} = (\bar{A}\bar{e}_3, \ldots \bar{e}_n) \Leftrightarrow W^a = 0, \tag{22}$$

что в силу (10) и (11) приводит к соотношениям :

$$B^{\hat{a}}_{a} = 0, \quad B^{a}_{\hat{a}} = 0 \Rightarrow \theta^{\hat{a}}_{a} = B^{\hat{a}}_{ai}\theta^i, \quad \theta^{a}_{\hat{a}} = B^{a}_{\hat{a}i}\theta^i. \tag{23}$$

Из (22), (23), (18) и (21) в силу (19) следует, что подпространства L^1_2 и L^2_{n-2} в L_n будут главными тогда и толькс тогда, когда

$$L_{12\hat{a}b} = 0, \quad L_{1212\hat{b}a} = 0, \quad B \neq 0, \quad R \neq 0. \tag{24}$$

При этом из рассмотрения исключается случай $B=0$, когда главные подпространства L^1_2 и L^2_{n-2} из L_n в каждой точке $(u)\in M_n$ определяются бесчисленным числом способов и случай $R=0$, когда проективитет $\overset{*}{R}{}^2$ является проективитетом W в смысле [4].

8. Из (12), (13), (22) и (24) следует, что каждой точке $(u)\in M_n$ расслоения $P_{n,m}$ $(n\geqslant 2)$ отвечает инвариантный проективитет

$$\overset{*}{R} = R(L^1_2) = \{R^{x}_{J12}\}$$

слоя $P_m(u)$ в себя, соответствующий главной плоскости L^1_2. Поэтому в качестве секущей точки $A_0(u)\in P_m(u)$, отвечающей точке $(u)\in M_n$, можно взять одну из неподвижных точек этого проективитета.

Библиографический список

1. Л а п т е в Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии: Тр. Геометр. семинара / ВИНИТИ АН СССР.– М., 1966. Т.1. С.139–189.

2. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. мат. о-ва. 1953. Т.2. С.275–382.

3. И в л е в Е.Т. О тангенциально-вырожденных расслоениях // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвузовский темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1984. Вып.15. С.32–37.

4. И в л е в Е.Т., И с а б е к о в М.Б. К проективной геометрической интерпретации некоторых образов, определяемых двухвалентными тензорами // Материалы науч. конф. по математике и механике.– Томск: Изд-во Томского ун-та, 1973. С.50–52.